Chapitre 2:

2.1

**Définition 1:**
On écrit $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ à coefficients réels. Aussi, pour deux matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit $A + B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. De manière similaire, pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. Finalement, on définit la transposée d'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, notée $A^T$ comme suit:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq m$. Il est important de remarquer que $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ dans cette situation.

**Lemme 2:**
Soient $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit également $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont nulles. (On appelle cette matrice la *matrice nulle*.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
5. $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$.
6. $1 \cdot A = A$.
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
8. $(A^T)^T = A$.
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
10. $0 + A = A = A + 0$.
11. $(-1) \cdot A + A = 0$.
12. $0 \cdot A = 0$. 
2.2

**DÉFINITION 1 :**

Soient $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$. On définit le produit $A \cdot B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$.

**LEMME 2 :**

Soient $A, B \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit également $I_p \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $(I_p)_{ii} = 1$ et $(I_p)_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq q$ tels que $i \neq j$. (On appelle cette matrice la matrice identité de taille $p \times p$.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

2. $(A + B)C = AC + BC$.
3. $A(C + D) = AC + AD$.
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$.
5. $0_{a \times m} \cdot A = 0_{a \times p}$, $A \cdot 0_{p \times r} = 0_{m \times r}$.
6. $(AC)^T = C^T A^T$.
7. $AI_p = A$ et $I_p C = C$. 
2.3

**DÉFINITION 1 :**
On dit qu'une matrice $A$ est carrée si elle est de taille $n \times n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si elle possède le même nombre de lignes et de colonnes. Aussi, une telle matrice est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$.

**PROPOSITION 2 :**
Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors il existe une unique matrice $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$. On notera en général $B = A^{-1}$.

**DÉFINITION 2 :**
Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. La **diagonale principale** de $A$ est la "ligne oblique" formée des composantes $(i,i)$ de $A$.

**DÉFINITION 3 :**
On dit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ qu'elle est

- **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$,
- **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$,
- **diagonale** si elle est carrée (i.e. $m = n$) et $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$,
- **symétrique** si elle est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i,j$, i.e. $A = A^T$.

2.4

**LEMME 1 :**
Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $AX = b$ un système de $n$ équations aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$. Alors le système possède une unique solution, donnée par $X = A^{-1}b.$
2.5

Définition 1:
Une matrice élémentaire (de taille $n \times n$) est une matrice obtenue en effectuant une (et une seule) opération élémentaire, de type (I), (II) ou (III), sur les lignes de la matrice $I_n$. Concrètement, on adoptera les notations suivantes.

1. La matrice $T_{ij}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes $i$ et $j$ de $I_n$.
2. La matrice $D_r(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la $r$-ème ligne de $I_n$ par $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. La matrice $L_{rs}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant $\lambda$ fois la ligne $s$ à la ligne $r$ de $I_n$.

Théorème 2:
Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice arbitraire et $E \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire de type (I), (II) ou (III). Alors $EA$ est la matrice obtenue en effectuant sur les lignes de $A$ l'opération de type (I), (II) ou (III), qui définit la matrice $E$.

Corollaire 3:
Les matrices élémentaires sont inversibles. On en effet

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji}, \quad D_r(\lambda)^{-1} = D_r(\lambda^{-1}), \quad L_{rs}(\lambda)^{-1} = L_{rs}(-\lambda).$$

2.6

Premier critère d’inversibilité:
Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si le système homogène $AX = 0$ possède une solution unique, à savoir, la solution triviale.

Algorithme pour trouver l'inverse d'une matrice donnée:
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Afin de déterminer si $A$ est inversible et de calculer son inverse (lorsque c'est possible), on procède comme suit :

1. Ecrire les matrices $A$ et $I_n$ l'une à côté de l'autre, formant ainsi une nouvelle matrice de taille $n \times 2n$.
2. Opérer sur les lignes de cette matrice ainsi obtenue afin de réduire le côté gauche à $I_n$.
3. Si l'on y arrive, alors $A$ est inversible et son inverse est donnée par la matrice à droite.
2.7

**COROLLAIRE DU PREMIER CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ:**

Soit \( A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \), alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice \( A \) est inversible si et seulement s'il existe \( B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \) telle que \( BA = I_n \).
2. La matrice \( A \) est inversible si et seulement s'il existe \( B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \) telle que \( AB = I_n \).

2.8

**PROPOSITION 1:**

Soit \( A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \). Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice \( AT_{ij} \) est obtenue en échangeant les colonnes \( i \) et \( j \) de \( A \).
2. La matrice \( AD_r(\lambda) \) est obtenue en multipliant la \( r \)-ème colonne de \( A \) par \( \lambda \).
3. La matrice \( AL_{rs}(\lambda) \) est obtenue en ajoutant \( \lambda \) fois la \( r \)-ème colonne de \( A \) à la \( s \)-ème.

**PROPOSITION 2:**

Soit \( A \) une matrice de taille \( m \times n \) et supposons qu'il soit possible de réduire \( A \) à une forme échelonnée en n'utilisant que des opérations élémentaires de la forme \( D_r(\lambda) \), \( E_{rs}(\lambda) \) (avec \( \lambda > 0 \)) sur les lignes de \( A \).

Alors il existe une matrice triangulaire inférieure \( L \) et une matrice triangulaire supérieure \( U \) telles que \( A = LU \).

2.9

**ALGORITHME POUR TROUVER \( L \) ET \( U \) DANS LA DÉCOMPOSITION \( LU \):**

Soit \( A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \) une matrice admettant une décomposition \( LU \). Afin de déterminer les matrices \( L \) et \( U \) dans une telle décomposition, on procède comme suit :

1. On applique successivement les opérations élémentaires de types (II) et (III) (avec matrices élémentaires correspondantes \( E_1, \ldots, E_k \)) aux lignes de la matrice \( A \) afin de la rendre échelonnée.
2. On pose \( U = E_k \cdots E_1 A \), c'est-à-dire \( U \) est la forme échelonnée de \( A \) obtenue à l'aide des opérations élémentaires ci-dessus.
3. La matrice \( L \) est alors obtenue en opérant sur les colonnes de \( I_n \) par \( E_1^{-1}, \ldots, E_k^{-1} \), dans cet ordre.
2.10

**APPLICATION DE LA DÉCOMPOSITION LU AUX SYSTÈMES LINÉAIRES :**

Soit un système $AX = b$ d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ et supposons que $A = LU$, où $L$ est triangulaire inférieure et $U$ triangulaire supérieure. Alors on résout le système de la manière suivante :

1. Poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$.
2. Résoudre le système $LY = b$.
3. Résoudre le système $UX = Y$.

2.11

**DÉFINITION 1 :**

Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. Une *décomposition par blocs* de $A$ est une manière de partitionner cette dernière matrice en plus petites matrices, que l'on obtient en traçant des lignes verticales et horizontales dans la matrice $A$.

**LEMME 2 :**

Soient $A, B \in M_{m \times n} (\mathbb{R})$ deux matrices décomposées en matrices par blocs de la même façon, alors on peut additionner $A$ et $B$ par blocs. Aussi, si $C$ et $D$ sont deux matrices admettant des décompositions en blocs

$$C = \begin{pmatrix}
C_{11} & \cdots & C_{1p} \\
C_{21} & \cdots & C_{2p} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
C_{m1} & \cdots & C_{mp}
\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}
D_{11} & \cdots & D_{1n} \\
D_{21} & \cdots & D_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
D_{p1} & \cdots & D_{pn}
\end{pmatrix}$$

telles que le nombre de colonnes de chaque bloc $C_{ij}$ soit égal au nombre de lignes de chaque bloc $D_{kj}$, alors on peut multiplier par blocs.